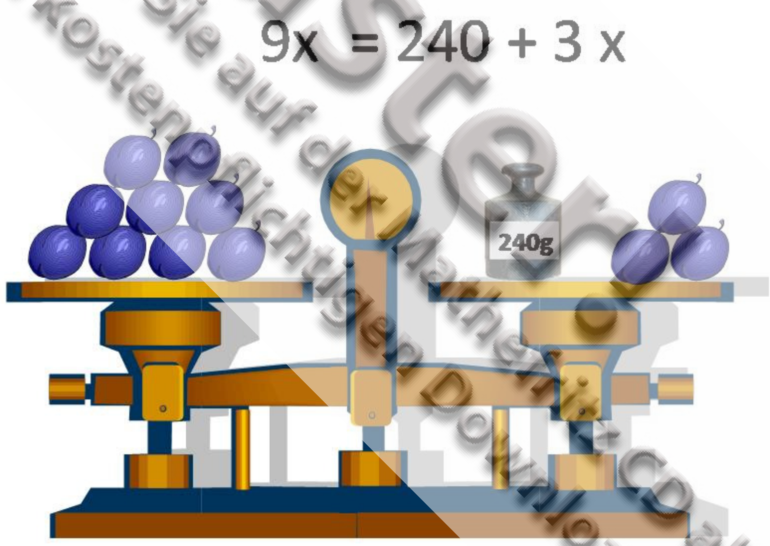
5

Mathefritz

Terme und Gleichungen



Meine Mathe-Seite im Internet
kostenlose Matheaufgaben, Skripte, Mathebücher
Lernspiele, Lerntipps, Quiz und noch viel mehr
http:// www.mathefritz.de

Eine Bitte

Sollten Sie in diesem Skript Fehler finden, so senden Sie bitte eine e-Mail an kontakt@mathefritz.de . Wir sind bemüht, diese so schnell wie möglich zu korrigieren.

Im Internet finden Sie immer die aktuellste Version.

Noch geplant:

Lösungen zu den Aufgaben

Diese Version

Versionsnummer: 0.01.01 Versionsdatum: 07.09.2008

Inhaltsverzeichnis

1 Terme

1.1 Definition Term

Ein Term ist ein Rechenausdruck. Er besteht aus Zahlen, Rechenzeichen, Klammern und Variablen (Platzhaltern).

- Terme kann man ausrechnen, umformen oder vereinfachen.
- Terme enthalten kein Gleichheitszeichen.
- Terme dürfen nicht mit Gleichungen verwechselt werden.

<u>**Beispiele für Terme:**</u>

$7+20\cdot(13-10)-2$

$2x+15-x+2+7x$

$8x+7+20^2-10+3\cdot(17-2x)$

$a+b+c$

<u>**Keine Terme sind:**</u>

$7+20\cdot(13-10)-2=5x$ (hierbei handelt es sich um eine Gleichung)

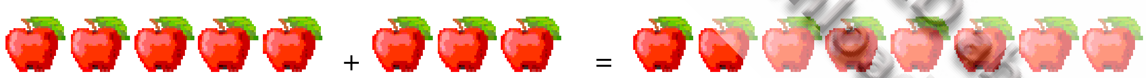
$[a+b\}+c$ (falsche Klammersetzung)

1.2 Rechnen mit Termen

Wir können manchmal Terme vereinfachen und zusammenfassen.

1. Beispiel: $5a+3a=a(5+3)=8a$

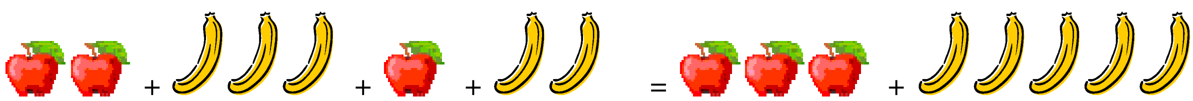
Hierbei haben wir das Distributivgesetz verwendet und ausgeklammert.
Gleiche Variablen dürfen zusammengefasst werden.
Nehmen wir einfach an, einer Variablen entspricht in der Natur ein Gegenstand, z.B. ein Apfel.
Dann bedeutet der obige Ausdruck:



Und es wird schnell klar, dass eigentlich 5 Äpfel und 3 Äpfel insgesamt 8 Äpfel ergeben.

2. Beispiel: $2a+3b+a+2b=3a+5b$

Wir dürfen NIE verschiedene Variablen (wie hier *a* und *b*) zusammenfassen.
Das wird anschaulich schnell klar, wenn wir wieder für a Äpfel nehmen und für b Bananen:



3. Beispiel: $17+2a+b-2a-15=b+2$

Reine Zahlen dürfen nicht mit Variablen zusammengefasst werden!
Im anschaulichen Beispiel bedeutet dies:

4. Beispiel: $a \cdot a \cdot a = a^3$

Multiplizieren wir gleiche Variablen (Faktoren) miteinander, so können wir diese Multiplikation auch als Potenz schreiben!

5. Beispiel: $5 \cdot 2a = 10a$

5 mal 2 Äpfel sind insgesamt 10 Äpfel:

Die Multiplikation ist kommutativ, d.h. wir dürfen Faktoren vertauschen und so die Multiplikation von Zahlen ausführen und die Variablen bleiben stehen:
$5x \cdot 2 = 5 \cdot x \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot x = 10x$

Merke:

1. **Gleiche Variablen dürfen zusammengefasst werden.**
2. **Wir dürfen NIE verschiedene Variablen (wie hier *a* und *b*) zusammenfassen.**
3. **Reine Zahlen dürfen nicht mit Variablen zusammengefasst werden!**
4. **Multiplizieren wir gleiche Variablen miteinander, so können wir dies als Potenz schreiben.**
5. **Bei der Multiplikation dürfen wir Faktoren vertauschen, so dass die Variable im Produkt rechts steht und wir die Zahlenfaktoren miteinander multiplizieren können.**

1.3 Übungsaufgaben

1. Aufgabe: Fasse die folgenden Terme so weit wie möglich zusammen!

$13a+2a+b-2b+5b$	$7z+3z-5z+8z-z$
$3x+3x-2x+5x$	$5w-4w+7w$
$10i+3i-i-4i$	$3y+y-2y+y-2y$
$5k+3k-4k+11k$	$20h-18h+25h-17h$

2. Aufgabe: Vereinfache die folgenden Terme!

$5x+3-4x+11$	$8+3y+12-2y-10+10y$
$2x+10-x+5$	$6z+2y+12-2z-12+10y$
$3z+1-z+11+7z$	$5+2i+15-2j-10+8i$
$20+5y+1-y+15+3y$	$20g+20+5g-18g-18$

3. Aufgabe: Vereinfache die folgenden Terme!

$5x\cdot 3$	$10\cdot y\cdot 4$
$3x\cdot 4$	$6\cdot 7i$
$3z\cdot 8$	$7x\cdot 8$
$20\cdot 3y$	$2g\cdot 9g$

4. Aufgabe: Löse die Klammern auf und fasse zusammen!

$8\cdot(10+x)+10$	$11+7\cdot(y+11)-80+3y$
$2\cdot(13b+8)-10$	$6\cdot(7i+6)-40i-30$
$3\cdot(8z+17)-50$	$7x+10\cdot(8x+9)-81x-89$
$20\cdot(7a+5)-100$	$2g+22+9\cdot(2g-2)$

5. Aufgabe: Vereinfache!

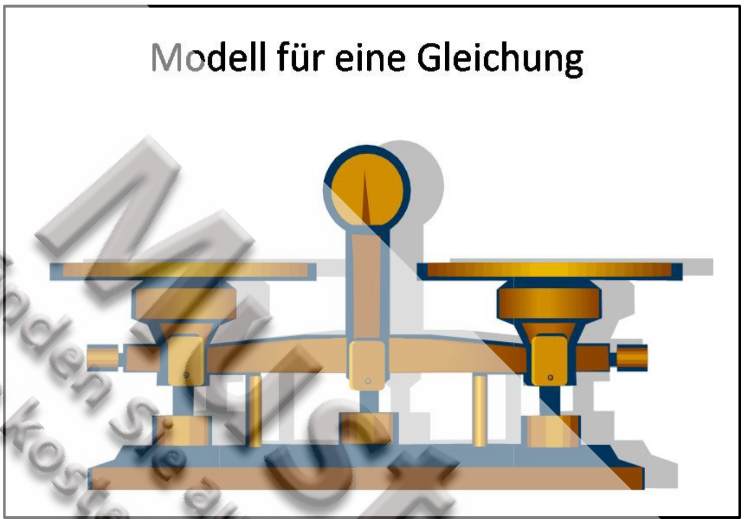
$6\cdot(10+2x)+3x+2\cdot(10+x)$	$13y+3\cdot(7y+12)-80+3\cdot(17-y)$
$3\cdot(3b+8)-9+7b$	$60\cdot(9i+6)-4\cdot(20-i)-200$
$2\cdot(8+17z)-10z+14$	$70\cdot(x+10)+2\cdot(4x+9)-8x-600$
$21\cdot(3a+4)-10\cdot(a-2)$	$21g+220+9\cdot(20g-10)$

2 Gleichungen

2.1 Definition

Zwei Terme, die durch ein Gleichheitszeichen verknüpft sind, nennt man **Gleichung**. Enthält keiner der Terme einen Platzhalter (Variable, Unbekannte), so nennt man die Gleichung auch Aussage, die wahr oder falsch sein kann. Enthält die Gleichung eine Variable, so nennt man sie auch Aussageform. Die Menge der Zahlen, die eine Gleichung lösen - die man einsetzen darf, so dass die Gleichung richtig ist - nennt man Lösungsmenge.

Als Modell kann man sich eine Gleichung wie eine Waage vorstellen.



2.2 So rechnen wir mit einfachen Gleichungen

2.2.1 Gleichungen anschaulich lösen

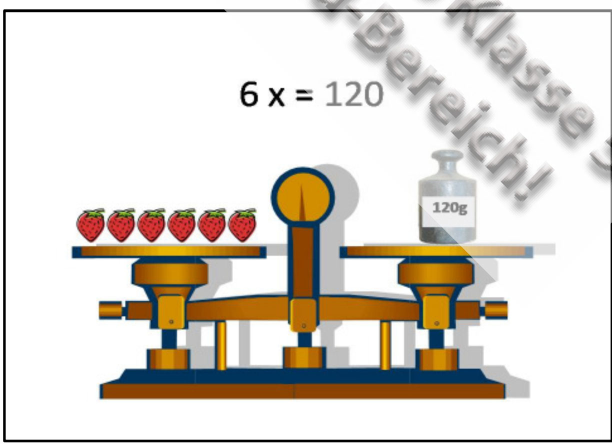
Bei einer Waage dürfen wir auf jeder Seite Dinge wegnehmen oder hinzufügen. Solange wir auf jeder Seite das Gleiche tun, bleibt die Waage im Gleichgewicht. Bei einer Gleichung dürfen wir auf jeder Seite die gleiche Rechenoperation durchführen, ohne das sich das spätere Ergebnis der Gleichung ändert. Dies wollen wir an verschiedenen Beispielen verstehen:

Beispiel 1: Sechs Erdbeeren wiegen 120g. Wie viel wiegt eine Erdbeere?

Diese Aufgabe können wir als Gleichung schreiben:

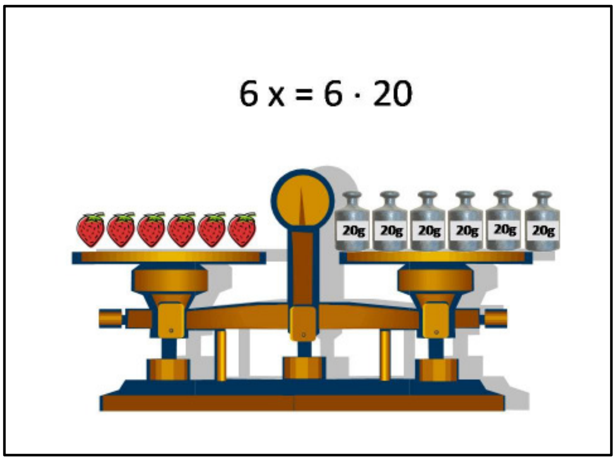
$$\mathbf{6 \cdot x = 120}$$

Künftig schreiben wir kein "Malzeichen" zwischen Zahlen und einer Variablen: $6 \cdot x = 6x$

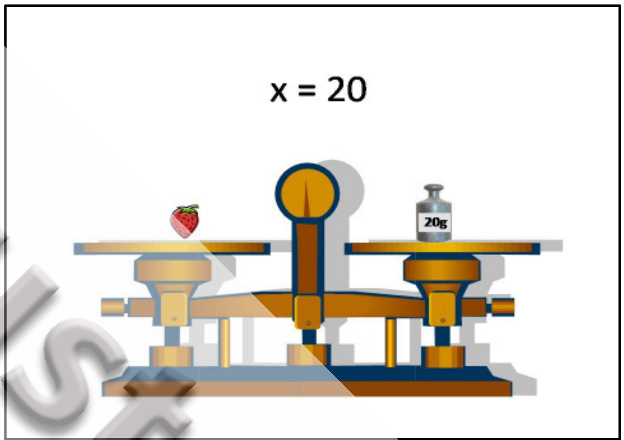


Anstelle der 120g können wir auch 6 einzelne Gewichte mit einer Masse von 20g auflegen, ohne dass die Waage aus dem Gleichgewicht kommt.

$$6 \cdot \boldsymbol{x} = \mathbf{6} \;\cdot\; \mathbf{20}$$



Dieser Schritt erscheint vielleicht überflüssig. Auf diese Art und Weise sehen wir jedoch, dass wir jetzt jede Seite durch 6 teilen können. Im Waagemodell bedeutet dies, dass wir jede Seite in 6 gleiche Portionen teilen und dann 5 von den 6 Teilen wegnehmen.



Nachdem wir jede Seite durch 6 geteilt haben, erhalten wir das Ergebnis unserer Aufgabe: **Eine Erdbeere wiegt 20g.**

Die Gleichung lautet nun:

$$\boldsymbol{x} = \mathbf{20}$$

Die Menge der Lösungen fassen wir in einer Lösungsmenge zusammen und schreiben dies:

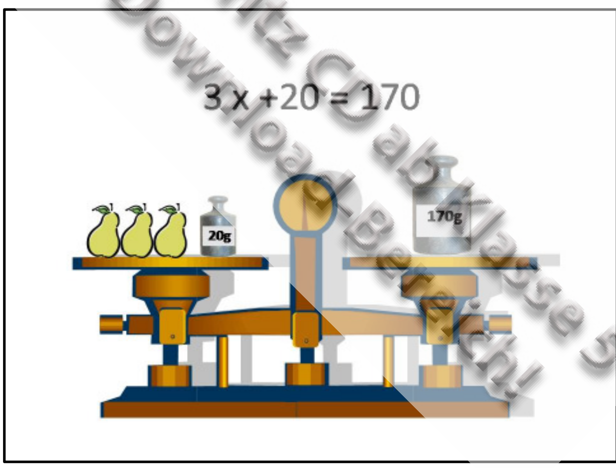
$$\boldsymbol{L} = \{20\}$$

Im späteren Verlauf des Unterrichts, z.B. in Klasse 8, werden wir Gleichungen lösen, die mehrere Zahlen als Lösung haben. Dann enthält die Lösungsmenge mehrere Zahlen.

Beispiel 2: **3 Birnen und 20g wiegen zusammen 170g. Wie viel wiegt eine Birne?**

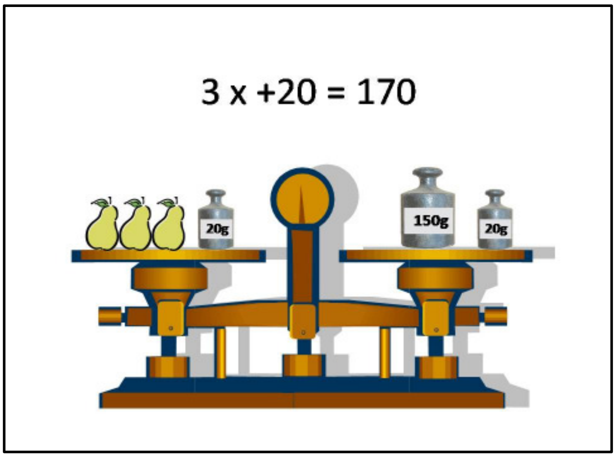
Diese Aufgabe können wir wieder als Gleichung schreiben:

$$\mathbf{3} \cdot \boldsymbol{x} + \mathbf{20} = \mathbf{170}$$



Zuerst wollen wir versuchen, auf der linken Seite die 20g zu entfernen. Jetzt könnte man sagen, auf der rechten Seite kann man keine 20g wegnehmen, da nur ein Gewicht von 170g aufliegt. Aber auch auf dem Wochenmarkt könnten wir das Gewicht von 170g ersetzen durch ein Gewicht von 150g und einem weiteren von 20g.

Um dies zu veranschaulichen, ist wieder ein Bild hierzu gezeichnet:



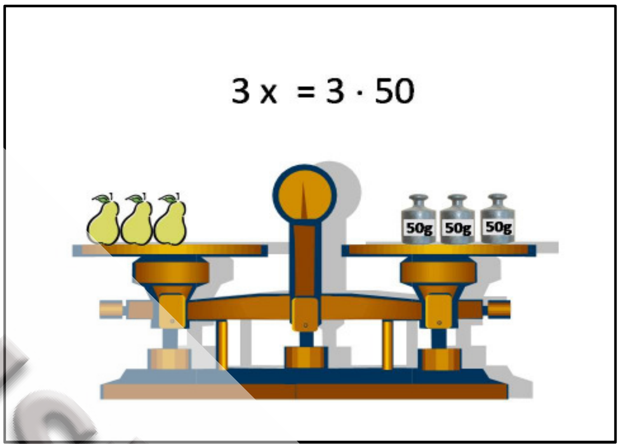
Sofort wird klar, dass wir jetzt auf jeder Seite 20g entfernen dürfen.

Die Gleichung lautet nun:

$$3 \cdot x = 150$$

Oder noch einmal vereinfacht:

$$3 \cdot x = 3 \cdot 50$$

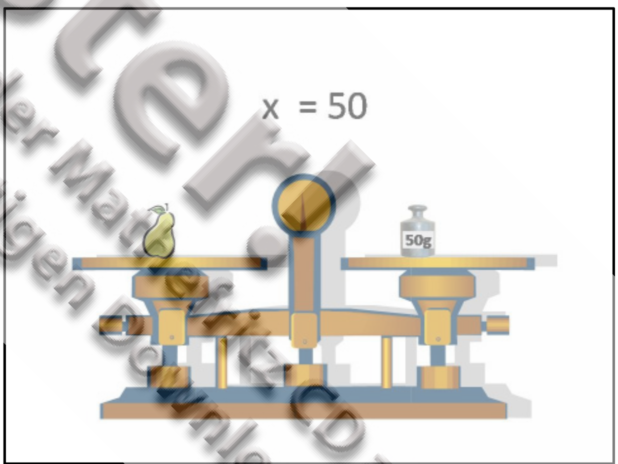


Wir teilen jede Seite durch 3 und erhalten das Ergebnis der Aufgabe bzw. Gleichung:

$$x = 50$$

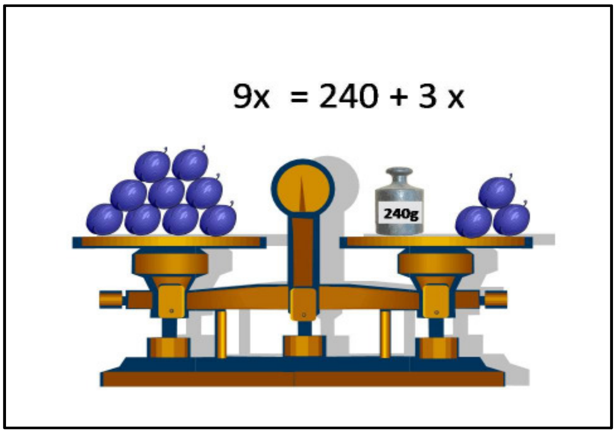
Die Lösungsmenge lautet:

$$L = \{50\}$$



Beispiel 3: **9 Pflaumen wiegen so viel wie 3 Pflaumen und 240g. Wie viel wiegt eine Pflaume?**

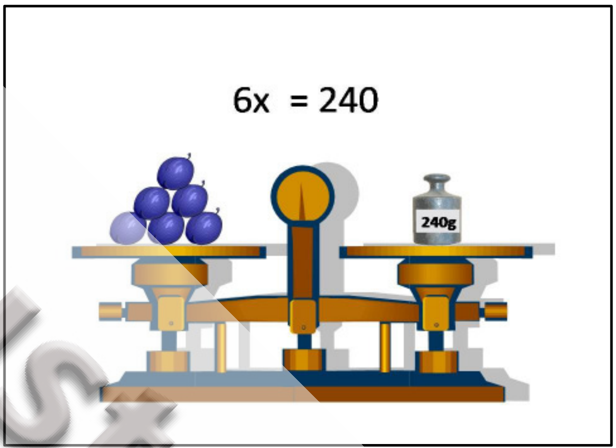
Diese Aufgabe schreiben wir als Gleichung:



$$9x = 240 + 3x$$

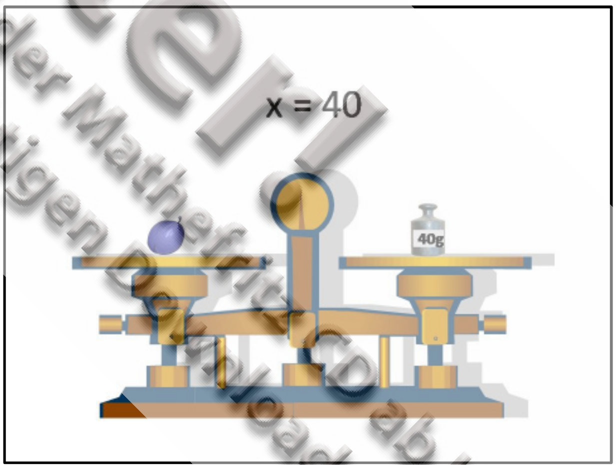
Auf jeder Seite nehmen wir 3 Pflaumen weg. Schon sieht die Waage anders aus.

Die Gleichung lautet nun:



$$6x = 240$$

Teilen wir jede Seite durch 6, erhalten wir:



$$x = 40$$

Die Lösungsmenge dürfen wir nicht vergessen:

$$L = \{40\}$$

Wir merken uns:
Auf jeder Seite einer Gleichung dürfen wir die gleiche Rechenoperation ausführen:

- Auf jeder Seite dürfen wir eine Zahl oder auch einen Teil des Terms addieren oder subtrahieren
- Jede Seite dürfen wir mit einer Zahl (oder auch einem Term) multiplizieren
- Jede Seite dürfen wir durch eine Zahl (oder auch einen Term) dividieren

Wichtig:
Bei diesen Rechenoperationen müssen wir alle Rechenregeln, die wir kennen, beachten, insbesondere das Ausklammern und Ausmultiplizieren.

2.2.2 Gleichungen rechnerisch lösen

Jetzt wollen wir Gleichungen rechnerisch lösen und hierbei den mathematischen Formalismus kennen lernen.

Einfache Gleichungen:

a) $5x = 200 \quad | : 5$ wir teilen jede Seite durch 5

$x = 40$ Die Lösung ist x = 40

$L = \{40\}$ Die Lösungsmenge nicht vergessen!

b) $2x + 15 = 45 \quad | -15$ wir subtrahieren 15 auf jeder Seite

$2x = 30 \quad | : 2$ wir teilen jede Seite durch 2

$x = 15$

$L = \{15\}$

c) $4x - 10 = 30 \quad | +10$ um -10 auf der linken Seite zu entfernen, müssen wir auf jeder Seite 10 addieren!

$4x = 40 \quad | : 4$ wir teilen jede Seite durch 4

$x = 10$

$L = \{10\}$

Etwas schwierigere Gleichungen

d) $2 \cdot (x - 5) = x - 5$ zuerst ausmultiplizieren, erst dann vereinfachen

$2x - 10 = x - 5 \quad | +10$ wir addieren 10 auf jeder Seite

$2x = x + 5 \quad | -x$ wir subtrahieren x auf jeder Seite

$x = 5$

$L = \{5\}$

Regeln für das Lösen von Gleichungen

1. Vereinfache jede Seite der Gleichung durch Ausmultiplizieren und zusammenfassen, wenn möglich.
2. Bringe die Ausdrücke mit der Variablen auf eine Seite und alle Zahlen auf die andere Seite. Wende hierzu Schritt für Schritt jeweils eine Rechenoperation auf beide Seiten an.

Merke - Achtung

Eine Gleichung kann auch keine Lösungsmenge haben, wenn sie unlösbar ist. Die Lösungsmenge lautet in diesem Fall:

$$L = \{\,\} \text{ oder } L = \emptyset$$

2.3 Übungsaufgaben

1. Aufgabe - Bestimme die Lösungsmenge

a) $5x = 5$

b) $7x + 3 = 10$

c) $8x - 4 = 20$

d) $10x + 25 = 75$

e) $11x = x + 100$

f) $3x - 30 = 60$

g) $3x + 20 = 5x - 10$

h) $x + 5 = x + 3$

i) $15x - 225 = 0$

j) $16x - 128 = 128$

2. Aufgabe - Vereinfache zunächst und löse dann die Gleichung

a) $5 \cdot (2x + 10) = 100$

b) $7 \cdot (x - 3) = 7$

c) $8x + 2 \cdot (4 - x) = 32$

d) $10x - 5 \cdot (2 - 2x) + 3x = 13$

e) $2(x - 1004) = 5(x - 2) - 4x + 12$

3. Aufgabe - Löse die Gleichungen

a) $5x + 7 \cdot (x - 3) = 4x - 5$

b) $3x + 3 \cdot (2x - 4) = 10x - 15$

c) $3x + (8 + 4x) \cdot 2 = 2 \cdot (2x + 20) + 4$

d) $7x - (2x - 15) \cdot 2 = 60 + 2x$

4. Aufgabe - Textaufgaben Gleichungen

a) Das Siebenfache einer Zahl ist gleich 63.

b) Addiert man zum Dreifachen einer Zahl 5 so erhält man das Vierfache der Zahl.

c) Das Doppelte der Summe einer Zahl mit 7 ergibt 17 mehr als die Zahl.

d) Subtrahiert man 12 vom 5-Fachen einer Zahl, erhält man das Doppelte der Zahl.

e) Multipliziert man eine Zahl mit 8 erhält man eine Zahl, die um 14 größer ist als die gesuchte Zahl.

5. Aufgabe - Textaufgaben

a) In einer Schulklasse sind doppelt so viele Mädchen wir Jungen. Zusammen sind es 33 Schüler.

b) Ein Apfel und eine Birne kosten zusammen 1,70 €. Der Apfel kostet 50 Cent weniger als die Birne. Was kosten Apfel und Birne?

c) In eine Klassenkasse haben bis auf 4 Kinder Ihren Beitrag eingezahlt. Es sind 112 € in der Kasse. Wenn alle eingezahlt hätten, wären 128 € in der Kasse. Wie viele Kinder sind in der Klasse und wie hoch ist der Beitrag?