Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen

Das Ziel dieses Kapitels ist es ein Verfahren zur Lösung von allgemeinen quadratischen Gleichungen der Form $ax^2 + bx + c = 0$ herzuleiten. Dazu betrachten wir zunächst ein Verfahren, dass zwar nicht alle Gleichungen dieser Art lösen kann, aber das für viele quadratische Gleichungen mit Lösungen in $\mathbb{N}$ sehr einfach anwendbar ist: Das Lösen von quadratischen Gleichungen mit Hilfe des **Satzes von Vieta**. Man spricht bei diesem Verfahre auch von **Faktorisieren**, da die quadratische Gleichung in zwei Faktoren zerlegt wird.

Der Satz von Vieta (Faktorisieren)

Hierzu betrachten wir eine vereinfachte Form der quadratischen Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$$

Wir teilen den Rechenausdruck durch a und erhalten:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad (2)$$

Nun setzen wir: $\frac{b}{a} = p$ (3) und $\frac{c}{a} = q$ (4)

Wir erhalten eine neue quadratische Gleichung:

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (5)$$

Wir wissen: Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens einer der beiden Faktoren null ist.

Wir betrachten hierzu die Gleichung:

$$(x - n_1) \cdot (x - n_2) = 0 \qquad (6)$$

Diese hat folglich die die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{n_1, n_2\}$.

Wir multiplizieren aus:

$$x^2 - (n_1 + n_2)x + n_1 n_2 \qquad (7)$$

Nun stellen wir fest, dass die beiden Zahlen n_1 und n_2 die Gleichung lösen, wenn sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllen:

$-(n_1 + n_2) = p$ (8) und $n_1 n_2 = q$ (9)

Dieser Zusammenhang wird im Satz von Vieta zusammengefasst!

Satz von Vieta:

Wenn n_1 und n_2 die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ lösen dann gilt: $-(n_1 + n_2) = p$ und $n_1 n_2 = q$.

Alternative Form:
Die Gleichung $x^2 + px + q = 0$
lässt sich umformen $(x + a) \cdot (x + b) = 0$ mit $a \cdot b = q$ und $(a + b) = p$

Die Lösung der Gleichung lautet dann $\mathbb{L} = \{-a; -b\}$

Beweis: Folgt direkt aus der Herleitung.

Beispiel: $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1) \cdot (x + 3) = 0$

Achtung: Die Lösung der Gleichung lautet: $\mathbb{L} = \{-1; -3\}$

Beispielaufgabe: Löse die Gleichung $2x^2 + 6x + 3 = -1$

1.) Wir formen um:

$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 4 = 0$ Division durch 2
$\Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$

damit ist: $p = 3, q = 2$

2.) Wir finden alle Teiler von q: $1; 2$

3.) Wir finden alle möglichen Produkte dieser Zahlen (mit beliebigen Vorzeichen), die q ergeben:

$1 \cdot 2 = 2; -1 \cdot -2 = 2$

4.) Wir überprüfen die Faktoren auf $-(n_1 + n_2) = p$.

$-(1 + 2) = 3$ Falsch!
$-(-1 - 2) = 3$ Richtig!

5.) Wir bilden nun die Lösungsmenge für unsere ursprüngliche Gleichung: $\mathbb{L} = \{-1, -2\}$

Damit kann man die ursprüngliche Gleichung: $2x^2 + 6x + 4 = 0$

umformen in: $\Leftrightarrow (x + 1) \cdot (x + 2) = 0$

6.) Optional machen wir die Probe:
$2 \cdot (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 3 = 2 - 6 + 3 = -1$ und
$2 \cdot (-2)^2 + 6 \cdot (-2) + 3 = 8 - 12 + 3 = -1$

Bemerkung:
Es kann auch sein, dass eine Gleichung nur eine oder auch keine Lösung hat. Den Grund dafür sehen wir später. Mithilfe dieses Verfahrens können wir nicht feststellen ob eine Gleichung keine Lösung hat. Wenn wir aber mit dem Verfahren eine oder zwei Lösungen finden, können wir sicher sein, dass dies die einzigen Lösungen sind. Ansonsten brechen wir nach Schritt 4 ab wenn wir keine passende Kombination finden.

Übungsaufgaben zum Satz von Vieta bzw. Faktorisieren von quadratischen Gleichungen:

Versuche mit Hilfe des Satzes von Vieta die folgenden Gleichungen zu lösen:

a)	$x^2 - 5x + 6 = 0$	b)	$x^2 + 7x + 12 = 0$	c)	$x^2 + 3x - 4 = 0$
d)	$x^2 - 4 = 0$	e)	$x^2 + 4 = 0$	f)	$5x^2 + 5x - 30 = 0$
g)	$x^2 - 16x + 64 = 1$	h)	$2x^2 + 4x + 2 = 0$	i)	$2x^2 + 4x + 1 = 0$

Lösung Aufgabe 1:

a) 1.) $x^2 - 5x + 6 = 0$
2.) $1; 2; 3; 6$
3.) $1 \cdot 6 = 6; -1 \cdot -6 = 6; 2 \cdot 3 = 6; -2 \cdot -3 = 6$
4.) $-(1 + 6) = -5$ Falsch!
$-(-1 - 6) = -5$ Falsch!
$-(2 + 3) = -5$ Richtig!
5.) $\mathbb{L} = \{2, 3\}$
6.) $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$ und
$3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

b) 1.) $x^2 + 7x + 12 = 0$
2.) $1; 2; 3; 4; 6; 12$
3.) $1 \cdot 12 = 12; -1 \cdot -12 = 12; 2 \cdot 6 = 12; -2 \cdot -6 = 12; 3 \cdot 4 = 12; -3 \cdot -4 = 12$
4.) $-(1 + 12) = 7$ Falsch!
$-(-1 - 12) = 7$ Falsch!
$-(2 + 6) = 7$ Falsch!
$-(-2 - 6) = 7$ Falsch!
$-(3 + 4) = 7$ Falsch!
$-(-3 - 4) = 7$ Richtig!
5.) $\mathbb{L} = \{-3, -4\}$
6.) $(-3)^2 + 7 \cdot (-3) + 12 = 9 - 21 + 12 = 0$ und
$(-4)^2 + 7 \cdot (-4) + 12 = 16 - 28 + 12 = 0$

c) 1.) $x^2 + 3x - 4 = 0$
2.) $1; 2; 4$
3.) $1 \cdot -4 = -4; -1 \cdot 4 = -4; 2 \cdot -2 = -4$
4.) $-(1 - 4) = 3$ Richtig!
5.) $\mathbb{L} = \{1, -4\}$
6.) $1^2 + 3 \cdot 1 - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$ und
$(-4)^2 + 3 \cdot (-4) - 4 = 16 - 12 - 4 = 0$

d) 1.) $x^2 - 4 = 0$
2.) $1; 2; 4$
3.) $1 \cdot -4 = -4; -1 \cdot 4 = -4; 2 \cdot -2 = -4$
4.) $-(1 - 4) = 0$ Falsch!
$-(-1 + 4) = 0$ Falsch!
$-(2 - 2) = 0$ Richtig!
5.) $\mathbb{L} = \{2, -2\}$
6.) $2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$ und
$(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0$

e) 1.) $x^2 + 4 = 0$
2.) $1; 2; 4$
3.) $1 \cdot 4 = 4; -1 \cdot -4 = 4; 2 \cdot 2 = 4; -2 \cdot -2 = 4$
4.) $-(1 + 4) = 0$ Falsch!
$-(-1 - 4) = 0$ Falsch!
$-(2 + 2) = 0$ Falsch!
$-(-2 - 2) = 0$ Falsch!
Keine Lösung mit Hilfe dieses Verfahrens möglich.

f) 1.) $5x^2 + 5x - 30 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$
2.) $1; 2; 3; 6$
3.) $1 \cdot -6 = -6; -1 \cdot 6 = -6; 2 \cdot -3 = -6; -2 \cdot 3 = -6$
4.) $-(1 - 6) = 1$ Falsch!
$-(-1 + 6) = 1$ Falsch!
$-(2 - 3) = 1$ Richtig!
5.) $\mathbb{L} = \{2, -3\}$
6.) $5 \cdot (2)^2 + 5 \cdot 2 - 30 = 20 + 10 - 30 = 0$ und
$5 \cdot (-3)^2 + 5 \cdot (-3) - 30 = 45 - 15 - 30 = 0$

g) 1.) $x^2 - 16x + 64 = 1$
$\Leftrightarrow x^2 - 16x + 63 = 0$
2.) $1; 3; 7; 9; 21; 63$
3.) $1 \cdot 63 = 63; -1 \cdot -63 = 63; 3 \cdot 21 = 63; -3 \cdot -21 = 63; 7 \cdot 9 = 63; -7 \cdot -9 = 63$
4.) $-(1 + 63) = -16$ Falsch!
$-(-1 - 63) = -16$ Falsch!
$-(3 + 21) = -16$ Falsch!
$-(-3 - 21) = -16$ Falsch!
$-(7 + 9) = -16$ Richtig!
5.) $\mathbb{L} = \{7, 9\}$
6.) $7^2 - 16 \cdot 7 + 64 = 49 - 112 + 64 = 1$ und
$9^2 - 16 \cdot 9 + 64 = 81 - 144 + 64 = 1$

h) 1.) $2x^2 + 4x + 2 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$
2.) 1
3.) $1 \cdot 1 = 1; -1 \cdot -1 = 1$
4.) $-(1 + 1) = 2$ Falsch!
$-(-1 - 1) = 2$ Richtig!
5.) $\mathbb{L} = \{-1\}$
6.) $2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 2 = 2 - 4 + 2 = 0$

i) 1.) $2x^2 + 4x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0$
2.) Da $q \notin \mathbb{N}$ können keine Teiler bestimmt werden.